1 Beispiellösungen zu ausgewählten Beispielen

Die Beispiele und Lösungen sind relativ willkürlich herausgegriffen – ich habe mich nur darum bemüht, dass sowohl leichte als auch schwere Aufgaben vertreten sind.

1.1 Was ist ein Widerspruch?

Ein Widerspruch ist eine Aussage der Form $\varphi \wedge \neg\varphi$.

Kommentar: Das ist eine (a) syntaktische und (b) sehr enge Definition; dass (a) nichts schadet, ergibt sich daraus, dass der zweite Test die Syntax zum Gegenstand hatte; man kann aber gerne auch eine semantische Definition als Ergänzung liefern, z.B. „Ein Widerspruch ist eine unerfüllbare Aussage“, was auch gleich Punkt (b) aufhebt. Und wenn man sich an (b) stößt, dann kann man ja sagen „Ein Widerspruch ist eine Aussage, aus der $\varphi \wedge \neg\varphi$ herleitbar ist“.

1.2 $Q \to R \vdash (P \vee Q) \to (P \vee R)$ (sehr einfach)

Die Konklusion ist ein Konditional, also sucht man sein/ihr Glück zunächst in einer $\to E$. Die ist denn auch nicht schwer: Zwar ist das Antecedens eine Disjunktion, braucht man also eine $\vee B$, um daraus zu schließen; doch ist es ganz einfach, aus jedem der beiden Disjunkte die gewünschte Aussage herzuleiten.

1	$Q \to R$	
2	$P \to Q$	
3	$P \vee Q$	Annahme für $\to E$, zu zeigen: $P \vee R$
4	P	1. Annahme für $\vee B$
5	$P \vee R$	4$\vee E$
6	Q	1. Annahme für $\vee B$
7	R	1,6$\to B$
8	$P \vee R$	7$\vee E$
9	$P \vee R$	3,4–5,6–8$\vee B$

1.3 $Q \to R, P \to Q \vdash (P \vee Q) \to (Q \wedge R)$ (einfach)

Die Konklusion ist ein Konditional, also versucht man erst einmal eine $\to E$. Leider ist das Antecedens, $P \vee Q$, eine Disjunktion, sodass man zur Herleitung des Konsequens eine $\vee B$ benötigt — deren beide Teile sind dann aber trivial.

1	$Q \to R$	
2	$P \to Q$	
3	$\quad P \vee Q$	zu zeigen: $Q \wedge R$
4	$\quad\quad P$	1. Annahme für $\vee B$
5	$\quad\quad Q$	2,4$\to B$
6	$\quad\quad R$	1,5$\to B$
7	$\quad\quad Q \wedge R$	5,6$\to B$
8	$\quad\quad Q$	2. Annahme für $\vee B$
9	$\quad\quad R$	1,8$\to B$
10	$\quad\quad Q \wedge R$	8,9$\wedge E$
11	$\quad Q \wedge R$	3,4–7,8-10$\vee B$
12	$(P \vee Q) \to (Q \wedge R)$	3–11$\to E$

1.4 $(S \to T) \to P \vdash \neg S \to P$

Die Konklusion ist ein Konditional, also liegt es nahe, als erstes eine $\to E$ zu versuchen, d. h. $\neg S$ anzunehmen und zu versuchen, daraus P herzuleiten. Die Prämisse winkt mit einem Zaunpfahl, dessen Inschrift „Wenn $S \to T$ wahr ist, dann ist auch P wahr“ lautet. $S \to T$ ist aber gar nicht schwer zu bekommen, erst recht wenn man hin und wieder geübt und/oder Hausübungen gemacht hat.

1	$(S \to T) \to P$	
2	$\quad \neg S$	Annahme für $\to E$, zu zeigen: P
3	$\quad\quad S$	Annahme für $\to E$, zu zeigen: T
4	$\quad\quad\quad \neg T$	
5	$\quad\quad\quad S \wedge \neg S$	2,3$\wedge E$
6	$\quad\quad T$	4,5$\neg B$
7	$\quad S \to T$	3–6$\to E$
8	$\quad P$	1,7$\to B$
9	$\neg S \to P$	2–8$\to E$

1.5 $\neg(P \vee \neg Q) \to (R \vee \neg S) \vdash (P \vee \neg Q) \vee (R \vee \neg S)$ (schwer)

Etwas anderes als einen indirekten Beweis gibt diese Konstellation nicht wirklich her. Die Schwierigkeit besteht darin, dass man innerhalb des indirekten Beweises einen weiteren indirekten Beweis führen muss — aber irgendetwas muss die letzte Aufgabe, die dafür gedacht ist, zwischen den Noten 1 und 2 zu unterscheiden, den Interessierten (die gibt es ja auch) bieten.

1	$\neg(P \vee \neg Q) \rightarrow (R \vee \neg S)$	
2	$\quad \neg((P \vee \neg Q) \vee (R \vee \neg S))$	Annahme für einen indirekten Beweis
3	$\quad\quad \neg(P \vee \neg Q)$	Annahme für einen indirekten Beweis
4	$\quad\quad R \vee \neg S$	1,3$\rightarrow B$
5	$\quad\quad (P \vee \neg Q) \vee (R \vee \neg S)$	4$\vee E$
6	$\quad\quad ((P \vee \neg Q) \vee (R \vee \neg S)) \wedge \neg((P \vee \neg Q) \vee (R \vee \neg S))$	2,5$\wedge E$
7	$\quad P \vee \neg Q$	3,6$\neg E$
8	$\quad (P \vee \neg Q) \vee (R \vee \neg S)$	7$\vee E$
9	$\quad ((P \vee \neg Q) \vee (R \vee \neg S)) \wedge \neg((P \vee \neg Q) \vee (R \vee \neg S))$	2,8$\wedge E$

1.6 $(\neg R \rightarrow Q) \vee (S \wedge R) \vdash Q \vee R$ (schwer)

Es ist zwar ziemlich schwierig, dieses Beispiel vollständig zu lösen, aber ziemlich *einfach*, eine grundlegende Strategie zu entwickeln: Da die Konklusion keine Auffälligkeiten zeigt und die einzige Prämisse eine Disjunktion ist, liegt es nahe, erst einmal eine $\vee B$ zu versuchen. Eines sieht man sofort: dass aus dem rechten Disjunkt, also aus $S \wedge R$, ganz trivial die Aussage $Q \vee R$ folgt – sieht und zeigt man das, dann hat man schon einmal eine ganz ordentliche Zahl an Punkten gesammelt.

Wirklich schwierig ist es, die Aussage $Q \vee R$ auch aus dem linken Disjunkt, nämlich aus $\neg R \rightarrow Q$, herzuleiten. Wenn das nicht gelingt, ist das aber nicht dramatisch und macht schlimmstenfalls den Unterschied zwischen einem Einser und einem Zweier aus.

1	$(\neg R \rightarrow Q) \vee (S \wedge R)$	
2	$\quad \neg R \rightarrow Q$	Annahme 1. Disjunkt für $\vee B$
3	$\quad\quad \neg(Q \vee R)$	Annahme für indir. Beweis
4	$\quad\quad\quad \neg R$	Annahme für indir. Beweis
5	$\quad\quad\quad Q$	2,4$\rightarrow B$
6	$\quad\quad\quad Q \vee R$	5$\vee E$
7	$\quad\quad\quad (Q \vee R) \wedge \neg(Q \vee R)$	3,6$\wedge E$
8	$\quad\quad R$	4,7$\neg B$
9	$\quad\quad Q \vee R$	8$\vee E$
10	$\quad\quad (Q \vee R) \wedge \neg(Q \vee R)$	3,9$\wedge E$
11	$\quad Q \vee R$	3,10$\neg B$
12	$\quad S \wedge R$	Annahme 2. Disjunkt für $\vee B$
13	$\quad R$	12$\wedge B$
14	$\quad Q \vee R$	13$\vee E$
15	$Q \vee R$	1, 2–11, 12–14$\vee B$