

1 Beispiellösungen zur Hausübung vom 20. Januar 2011

Tippfehler vorbehalten!

1.1 $P \vee Q \vdash \neg P \rightarrow Q$ (lang, aber nicht wirklich schwer)

Die Konklusion ist ein Konditional, also sucht man sein/ihr Glück zunächst in einer $\rightarrow E$, versucht also, aus $\neg P$ die Aussage Q herzuleiten. Dieses Q findet man nirgends explizit, dafür aber findet man eine Disjunktion, die Q zumindest zur Möglichkeit stellt. Doch auch das andere Disjunkt verströmt Freude, denn es widerspricht ganz offen der Annahme $\neg P$...

1	$P \vee Q$																							
2	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\neg P$</td> <td>Annahme für $\rightarrow E$, zu zeigen: Q</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">P</td> <td>1. Annahme für $\vee B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\neg Q$</td> <td>Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: Q</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$P \wedge \neg P$</td> <td>2, 3 $\wedge E$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>4, 5 $\neg B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>2. Annahme für $\vee B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>Wiederholung von 7</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>1, 3-6, 7-8 $\vee B$</td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> <tr> <td>10</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\neg P \rightarrow Q$</td> <td>2-9 $\rightarrow E$ — fertig!</td> </tr> </table>	$\neg P$	Annahme für $\rightarrow E$, zu zeigen: Q	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">P</td> <td>1. Annahme für $\vee B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\neg Q$</td> <td>Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: Q</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$P \wedge \neg P$</td> <td>2, 3 $\wedge E$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>4, 5 $\neg B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>2. Annahme für $\vee B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>Wiederholung von 7</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>1, 3-6, 7-8 $\vee B$</td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	P	1. Annahme für $\vee B$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\neg Q$</td> <td>Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: Q</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$P \wedge \neg P$</td> <td>2, 3 $\wedge E$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>4, 5 $\neg B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>2. Annahme für $\vee B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>Wiederholung von 7</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>1, 3-6, 7-8 $\vee B$</td> </tr> </table>	$\neg Q$	Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: Q	$P \wedge \neg P$	2, 3 $\wedge E$	Q	4, 5 $\neg B$	Q	2. Annahme für $\vee B$	Q	Wiederholung von 7	Q	1, 3-6, 7-8 $\vee B$			10	$\neg P \rightarrow Q$	2-9 $\rightarrow E$ — fertig!
$\neg P$	Annahme für $\rightarrow E$, zu zeigen: Q																							
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">P</td> <td>1. Annahme für $\vee B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\neg Q$</td> <td>Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: Q</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$P \wedge \neg P$</td> <td>2, 3 $\wedge E$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>4, 5 $\neg B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>2. Annahme für $\vee B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>Wiederholung von 7</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>1, 3-6, 7-8 $\vee B$</td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	P	1. Annahme für $\vee B$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\neg Q$</td> <td>Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: Q</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$P \wedge \neg P$</td> <td>2, 3 $\wedge E$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>4, 5 $\neg B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>2. Annahme für $\vee B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>Wiederholung von 7</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>1, 3-6, 7-8 $\vee B$</td> </tr> </table>	$\neg Q$	Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: Q	$P \wedge \neg P$	2, 3 $\wedge E$	Q	4, 5 $\neg B$	Q	2. Annahme für $\vee B$	Q	Wiederholung von 7	Q	1, 3-6, 7-8 $\vee B$									
P	1. Annahme für $\vee B$																							
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\neg Q$</td> <td>Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: Q</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$P \wedge \neg P$</td> <td>2, 3 $\wedge E$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>4, 5 $\neg B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>2. Annahme für $\vee B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>Wiederholung von 7</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">Q</td> <td>1, 3-6, 7-8 $\vee B$</td> </tr> </table>	$\neg Q$	Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: Q	$P \wedge \neg P$	2, 3 $\wedge E$	Q	4, 5 $\neg B$	Q	2. Annahme für $\vee B$	Q	Wiederholung von 7	Q	1, 3-6, 7-8 $\vee B$												
$\neg Q$	Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: Q																							
$P \wedge \neg P$	2, 3 $\wedge E$																							
Q	4, 5 $\neg B$																							
Q	2. Annahme für $\vee B$																							
Q	Wiederholung von 7																							
Q	1, 3-6, 7-8 $\vee B$																							
10	$\neg P \rightarrow Q$	2-9 $\rightarrow E$ — fertig!																						

1.2 $P \rightarrow \neg Q, Q \vdash \neg P$ (sehr einfach)

Mangels offensichtlicher Alternativen versucht man spätestens irgendwann einen indirekten Beweis und ist damit gar geschwind am Ziel:

1	$P \rightarrow \neg Q$									
2	Q									
3	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">P</td> <td>Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: $\neg P$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\neg Q$</td> <td>1, 3 $\rightarrow B$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$Q \wedge \neg Q$</td> <td>2, 4 $\wedge E$</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">$\neg P$</td> <td>3, 5 $\neg E$ — fertig!</td> </tr> </table>	P	Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: $\neg P$	$\neg Q$	1, 3 $\rightarrow B$	$Q \wedge \neg Q$	2, 4 $\wedge E$	$\neg P$	3, 5 $\neg E$ — fertig!	
P	Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: $\neg P$									
$\neg Q$	1, 3 $\rightarrow B$									
$Q \wedge \neg Q$	2, 4 $\wedge E$									
$\neg P$	3, 5 $\neg E$ — fertig!									

1.3 $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P$ (sehr einfach)

Mangels Alternativen (oder wenn man alle anderen Ideen aufgeben musste, weil sie keinen Erfolg zeitigten) versucht man einen indirekten Beweis.

1	$\neg(P \vee Q)$	
2	P	Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: $\neg P$
3	$P \vee Q$	$2 \vee E$
4	$(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$	1, 3 $\wedge E$
5	$\neg P$	2, 4 $\neg E$ — fertig!

1.4 $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$ (länger, aber einfach)

Die Konklusion ist eine Konjunktion, und um auf eine Konjunktion zu schließen, könnte man eine $\wedge E$ versuchen. Hierfür benötigte man $\neg P$ und $\neg Q$. Jedes davon folgt ziemlich unmittelbar aus der Prämisse, wie das vorangehende Beispiel gezeigt hat.

1	$\neg(P \vee Q)$	
2	P	Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: $\neg P$
3	$P \vee Q$	$2 \vee E$
4	$(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$	1, 3 $\wedge E$
5	$\neg P$	2, 4 $\neg E$ — cool!
6	Q	Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: $\neg Q$
7	$P \vee Q$	$6 \vee E$
8	$(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$	1, 7 $\wedge E$
9	$\neg Q$	6, 8 $\neg E$ — cool!
10	$\neg P \wedge \neg Q$	5, 9 $\wedge E$ — fertig!

1.5 $\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$ (schön schwer)

Da sonst nix klappt, ist man bald beim Versuch eines indirekten Beweises. Der klappt hier aber auch nur dann, wenn man den Geistesblitz erfährt, dass sich eine Aussage, die einen Widerspruch zur Prämisse bildet, aus den beiden Aussagen P und Q zusammensetzen lässt. Und sowohl P als auch Q lassen sich mit für sich genommen reichlich banalen indirekten Beweisen herleiten.

1	$\neg(P \wedge Q)$	
2	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: $\neg P \vee \neg Q$
3	$\neg P$	Geistesblitz ₁
4	$\neg P \vee \neg Q$	3∨E
5	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	2, 4∧E
6	P	3, 5¬B
7	$\neg Q$	Geistesblitz ₂
8	$\neg P \vee \neg Q$	7∨E
9	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	2, 8∧E
10	Q	7, 9¬B
11	$P \wedge Q$	6, 10∧E
12	$(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$	1,11∧E
13	$\neg P \vee \neg Q$	2,12¬B

1.6 $\neg P \wedge \neg Q \vdash \neg(P \vee Q)$ (schön schwer)

Ein indirekter Beweis drängt sich auf (spätestens dann, wenn man stunden- und tagelang erfolglos andere Möglichkeiten gesucht hat). Die Annahme, die man zum Widerspruch führen möchte, lautet $P \vee Q$, ist also eine Disjunktion — und um aus einer Disjunktion zu schließen, versucht man habituell als erstes eine $\vee B$.

1	$\neg P \wedge \neg Q$	
2	$P \vee Q$	Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: $\neg(P \vee Q)$
3	P	1. Annahme für eine $\vee B$
4	$\neg P$	1∧B
5	$P \wedge \neg P$	3, 4∧E
6	Q	2. Annahme für eine $\vee B$
7	$\neg Q$	1∧B
8	$\neg(P \wedge \neg P)$	Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: $P \wedge \neg P$
9	$Q \wedge \neg Q$	6, 7∧E
10	$P \wedge \neg P$	8, 9¬B
11	$P \wedge \neg P$	2, 3-5, 6-10∨B
12	$\neg(P \vee Q)$	2, 11¬E — fertig!

1.7 $\neg P \vee \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$ (schön schwierig!)

Ähnliche Überlegungen wie beim vorangehenden Beispiel.

1	$\neg P \vee \neg Q$	
2	$P \wedge Q$	Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: $\neg(P \wedge Q)$
3	$\neg P$	1. Annahme für eine $\vee B$
4	P	$2 \wedge B$
5	$P \wedge \neg P$	$3, 4 \wedge E$
6	$\neg Q$	2. Annahme für eine $\vee B$
7	Q	$2 \wedge B$
8	$\neg(P \wedge \neg P)$	Annahme für einen indirekten Beweis, z.z.: $P \wedge \neg P$
9	$Q \wedge \neg Q$	$6, 7 \wedge E$
10	$P \wedge \neg P$	$8, 9 \neg B$
11	$P \wedge \neg P$	$1, 3-5, 6-10 \vee B$
12	$\neg(P \wedge Q)$	$2, 11 \neg E$ — fertig!