Kapitel 1

Aussagenlogik

1.1 Kommutativgesetze

Zur Entspannung zwei einfache Argumente, die als Kommutativgesetz der Konjunktion bekannt sind:

Argument 1.1 $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$

Beweis

1	(1)	$P \wedge Q$	A
1	(2)	P	$1 \wedge B$
1	(3)	Q	$1 \wedge B$
1	(4)	$Q \wedge P$	$3, 2 \wedge E$

Argument 1.2 $Q \wedge P \vdash P \wedge Q$

Die Gltigkeit dieser beiden Argumente bedeutet, dass die Reihenfolge, in der die Konjunkte einer Konjunktion aufgeschrieben sind, gleichgltig wre.

Eine Spur komplizierter ist es, das Kommutativgesetz der Disjunktion zu beweisen:

Argument 1.3 $P \vee Q \vdash Q \vee P$

Beweis

1	(1)	$P \vee Q$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$Q \vee P$	$2 \vee E$
4	(4)	Q	A
4	(5)	$Q \vee P$	$4 \vee E$
1	(6)	$Q \vee P$	$1, 2, 3, 4, 5 \vee B$

Die Konklusion ist eine Disjunktion; die nchstliegende Mglichkeit zur Herleitung einer Disjunktion ist die $\vee E$, fr die es ausreicht, eines der beiden Disjunkte —im Beispiel Q oder P— hergeleitet zu haben.

Da zu Beginn keines der beiden Disjunkte verfgbar ist und es auch keine Mglichkeit gibt, aus der einzigen Prmisse, $P \vee Q$, auf P oder auf Q zu schlieen, mssen wir unser Interesse an den beiden (ohne es zu vergessen) zunchst hintanstellen und nach einer anderen Strategie suchen.

Die einzige Prmisse, $P \vee Q$, ist eine Disjunktion, und die nchstliegende Mglichkeit, aus einer Disjunktion zu schlieen, ist die $\vee B$. Fr sie mssten wir sowohl aus dem ersten als auch aus dem zweiten Disjunkt einen uns interessierenden Satz herleiten. Nun lauten aber diese beiden Disjunkte P bzw Q; aus jedem von ihnen knnen wir —das im vorangehenden Absatz gespeicherte Wissen bedenkend— auf die von uns gewnschte Konklusion $Q \vee P$ schlieen. Da $Q \vee P$ aus jedem der beiden Disjunkte der Prmisse, $P \vee Q$, folgt, folgt es aus der gesamten Disjunktion und haben wir den Weg zum Ziel gefunden. Formal ausgefhrt wird er in den Zeilen (2) bis (6).

Argument 1.4 $Q \vee P \vdash P \vee Q$

1.2 Assoziativgesetze

Auch die Assoziativgesetze sind sehr brauchbar:

Argument 1.5 $P \wedge (Q \wedge R) \vdash (P \wedge Q) \wedge R$

Beweis	1	(1)	$P \wedge (Q \wedge R)$	A
	1	(2)	P	$1 \wedge B$
	1	(3)	$Q \wedge R$	$1 \wedge B$
	1	(4)	Q	$3 \wedge B$
	1	(5)	$P \wedge Q$	$2, 4 \wedge E$
	1	(6)	R	$3 \wedge B$
	1	(7)	$(P \wedge Q) \wedge R$	$5, 6 \wedge E$

Die Konklusion ist eine Konjunktion mit den Konjunkten $P \wedge Q$ und R. Am einfachsten erhlt man eine Konjunktion mittels der $\wedge E$, fr deren Anwendung allerdings erst die beiden Konjunkte hergeleitet werden mssen. Nun ist das erste Konjunkt, $P \wedge Q$, seinerseits eine Konjunktion und knnte dadurch ebenfalls mittels einer $\wedge E$ hergeleitet werden, soferne seine Konjunkte, P und Q hergeleitet wren. Damit die beiden Anwendungen der $\wedge E$ mglich sind, mssen wir somit die einfachen Stze P, Q und R herleiten.

Ein Blick auf die einzige Prmisse zeigt uns, dass zumindest P sehr leicht erschlossen werden kann: Die Prmisse ist eine Konjunktion, als deren erstes Konjunkt P auftritt. Mittels der $\wedge B$ schlieen wir mhelos aus Zeile (1) auf Zeile (2), P.

Die beiden anderen Stze, Q und R, sind kaum schwieriger zu finden: Das zweite Konjunkt der Prmisse lautet $Q \wedge R$, und aus diesem Satz lsst sich mittels zweier $\wedge B$ sowohl auf Q als auch auf R schlieen. Wir schlieen daher zunchst in Zeile (3) auf das zweite Disjunkt, $Q \wedge R$, und dann in Zeile (4) bzw. (6) auf Q bzw. R. In Zeile (5) werden die beiden Zwischenergebnisse aus (2) und (4) zu

$P \wedge Q$, dem ersten Konjunkt der Konklusion, zusammengesetzt. Vollendet wird das Werk in Zeile (7), wo das zweite Konjunkt aus Zeile (6) hinzutritt.

Argument 1.6 $(P \wedge Q) \wedge R \vdash P \wedge (Q \wedge R)$

Gleich ein gutes Stck komplizierter ist das Assoziativgesetz der Disjunktion, weshalb ich fr beide Argumente eine Lsung beilege:

Argument 1.7 $P \vee (Q \vee R) \vdash (P \vee Q) \vee R$

Beweis	1	(1)	$P \vee (Q \vee R)$	A
	2	(2)	P	A
	2	(3)	$P \vee Q$	$2 \vee E$
	2	(4)	$(P \vee Q) \vee R$	$3 \vee E$
	5	(5)	$Q \vee R$	A
	6	(6)	Q	A
	6	(7)	$P \vee Q$	$6 \vee E$
	6	(8)	$(P \vee Q) \vee R$	$7 \vee E$
	9	(9)	R	A
	9	(10)	$(P \vee Q) \vee R$	$9 \vee E$
	5	(11)	$(P \vee Q) \vee R$	$5, 6, 8, 9, 10 \vee B$
	1	(12)	$(P \vee Q) \vee R$	$1, 2, 4, 5, 11 \vee B$

Da die einzige Prmisse eine Disjunktion ist und sich kein anderer offenkundiger Weg zeigt, liegt es nahe, unser Glck bei der $\vee B$ zu suchen. Wir nehmen daher in Zeile (2) das erste Disjunkt, P, an und versuchen, daraus etwas Brauchbares herzuleiten. In unserem Fall gelingt es mittels zweier $\vee E$ (Zeile 3 und Zeile 4), die Konklusion —also etwas sehr Brauchbares— aus dem ersten Disjunkt herzuleiten.

Um die $\vee B$ anwenden und damit aus der Disjunktion auf die Konklusion schlieen zu knnen, brauchen wir nur noch zu zeigen, dass die Konklusion auch aus dem rechten Disjunkt, $Q \vee R$ folgt. Wir nehmen daher in Zeile (5) dieses Disjunkt an.

Wie wir nun feststellen werden, ist die Herleitung der Konklusion aus dem zweiten Disjunkt erheblich komplizierter als jene aus dem ersten: Das zweite Disjunkt, $Q \vee R$, ist ebenfalls eine Disjunktion, und der nchstliegende Weg, aus ihr zu schlieen, ist eine weitere $\vee B$. Wir mssen also erst aus dem ersten Disjunkt, Q, und anschlieend aus dem zweiten Disjunkt, R, unsere Konklusion, $(P \vee Q) \vee R$, herleiten. Die Herleitung aus dem ersten Disjunkt, Q, nimmt die Zeilen 6 bis 8 ein, jene aus dem zweiten Disjunkt, R, die Zeilen 9 bis 10. In Zeile 11 wird nun die innere $\vee B$, jene aus $Q \vee R$, vollzogen.

Da nun gezeigt ist, dass der Satz $(P \vee Q) \vee R$ sowohl aus dem ersten Disjunkt der Prmisse, P, als auch aus dem zweiten Disjunkt der Prmisse, $Q \vee R$, folgt, kann nun die $\vee B$ aus der Prmisse in Zeile 12 abgeschlossen werden.

Argument 1.8 $(P \vee Q) \vee R \vdash P \vee (Q \vee R)$

Beweis	1	(1)	$(P \vee Q) \vee R$	A
	2	(2)	$P \vee Q$	A
	3	(3)	P	A
	3	(4)	$P \vee (Q \vee R)$	$3 \vee E$
	5	(5)	Q	A
	5	(6)	$Q \vee R$	$5 \vee E$
	5	(7)	$P \vee (Q \vee R)$	$6 \vee E$
	2	(8)	$P \vee (Q \vee R)$	$2, 3, 4, 5, 7 \vee B$
	9	(9)	R	A
	9	(10)	$Q \vee R$	$9 \vee E$
	9	(11)	$P \vee (Q \vee R)$	$10 \vee E$
	1	(12)	$P \vee (Q \vee R)$	$1, 2, 8, 9, 11 \vee B$

1.3 Distributivgesetze

Eine weitere Steigerung —sowohl was die Wichtigkeit fr Anwendungen als auch was die Schwierigkeit betrifft— sind die Distributivgesetze.

Argument 1.9 $P \vee (Q \wedge R) \vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Beweis	1	(1)	$P \vee (Q \wedge R)$	A
	2	(2)	P	A
	2	(3)	$P \vee Q$	$2 \vee E$
	2	(4)	$P \vee R$	$2 \vee E$
	2	(5)	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$3, 4 \wedge E$
	6	(6)	$Q \wedge R$	A
	6	(7)	Q	$6 \wedge B$
	6	(8)	$P \vee Q$	$7 \vee E$
	6	(9)	R	$6 \wedge B$
	6	(10)	$P \vee R$	$9 \vee E$
	6	(11)	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$8, 10 \wedge E$
	1	(12)	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$1, 2, 5, 6, 11 \vee B$

Argument 1.10 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \vdash P \vee (Q \wedge R)$

Beweis	1	(1)	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	A
	1	(2)	$P \vee Q$	$1 \wedge B$
	3	(3)	P	A
	3	(4)	$P \vee (Q \wedge R)$	$3 \vee E$
	5	(5)	Q	A
	1	(6)	$P \vee R$	$1 \wedge B$
	7	(7)	P	A
	7	(8)	$P \vee (Q \wedge R)$	$7 \vee E$
	9	(9)	R	A
	5,9	(10)	$Q \wedge R$	$5, 9 \wedge E$
	5,9	(11)	$P \vee (Q \wedge R)$	$10 \vee E$
	1,5	(12)	$P \vee (Q \wedge R)$	$6, 7, 8, 9, 11 \vee B$
	1	(13)	$P \vee (Q \wedge R)$	$2, 3, 4, 5, 12 \vee B$

Argument 1.11 $P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Beweis

1	(1)	$P \wedge (Q \vee R)$	A
1	(2)	P	$1 \wedge B$
1	(3)	$Q \vee R$	$1 \wedge B$
4	(4)	Q	A
1,4	(5)	$P \wedge Q$	$2, 4 \wedge E$
1,4	(6)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$5 \vee E$
7	(7)	R	A
1,7	(8)	$P \wedge R$	$2, 7 \wedge E$
1,7	(9)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$8 \vee E$
1	(10)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$3, 4, 6, 7, 9 \vee B$

Argument 1.12 $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$

Beweis

1	(1)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	A
2	(2)	$P \wedge Q$	A
2	(3)	Q	$2 \wedge B$
2	(4)	$Q \vee R$	$3 \vee E$
2	(5)	P	$2 \wedge B$
2	(6)	$P \wedge (Q \vee R)$	$4, 5 \wedge E$
7	(7)	$P \wedge R$	A
7	(8)	R	$7 \wedge B$
7	(9)	$Q \vee R$	$8 \vee E$
7	(10)	P	$7 \wedge B$
7	(11)	$P \wedge (Q \vee R)$	$9, 10 \wedge E$
1	(12)	$P \wedge (Q \vee R)$	$1, 2, 6, 7, 11 \vee B$

1.4 Modus tollendo tollens

Folgende Schlussfigur ist unter dem klassischen Namen *modus tollendo tollens* bekannt:

Argument 1.13 $P \to Q, \neg Q \vdash \neg P$

Dieses Beiepiel lsst sich mit einem recht einfachen indirekten Beweis lsen:

Beweis

1	(1)	$P \to Q$	A
2	(2)	$\neg Q$	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	$1, 3 \to B$
1,2,3	(5)	$Q \wedge \neg Q$	$2, 4 \wedge E$
1,2	(6)	$\neg P$	$3, 5 \neg E$

1.5 Modus ponendo tollens

Kaum komplizierter zu beweisen ist die klassische Schlussfigur *modus ponendo tollens*.

Argument 1.14 $\neg(P \wedge Q), P \vdash \neg Q$

Auch hier fhrt wieder ein geradliniger und kurzer indirekter Beweis zum Ziel:

Beweis

1	(1)	$\neg(P \wedge Q)$	A
2	(2)	P	A
3	(3)	Q	A
2,3	(4)	$P \wedge Q$	$2, 3 \wedge E$
1,2,3	(5)	$(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$	$1, 4 \wedge E$
1,2	(6)	$\neg Q$	$3, 5 \neg E$

1.6 Modus tollendo ponens

Dieser klassische Modus ist schon ein wenig aufwendiger zu beweisen:

Argument 1.15 $P \vee Q, \neg P \vdash Q$

Beweis

1	(1)	$P \vee Q$	A
2	(2)	$\neg P$	A
3	(3)	P	A
4	(4)	$\neg Q$	A
3,4	(5)	$P \wedge \neg Q$	$3, 4 \wedge E$
3,4	(6)	P	$5 \wedge B$
2,3,4	(7)	$P \wedge \neg P$	$2, 6 \wedge E$
2,3	(8)	$\neg\neg Q$	$4, 7 \neg E$
2,3	(9)	Q	$8 \neg\neg B$
10	(10)	Q	A
10	(11)	$Q \wedge Q$	$10, 10 \wedge E$
10	(12)	Q	$11 \wedge B$
1,2	(13)	Q	$1, 3, 9, 10, 12 \vee B$

1.7 Tertium non datur

Nicht vllig trivial ist folgendes Argument zu beweisen:

Argument 1.16 $\vdash P \vee \neg P$

Beweis

1	(1)	$\neg(P \vee \neg P)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee \neg P$	$2 \vee E$
1,2	(4)	$(P \vee \neg P) \wedge \neg(P \vee \neg P)$	$1, 3 \wedge E$
1	(5)	$\neg P$	$2, 4 \neg E$
1	(6)	$P \vee \neg P$	$5 \vee E$
1	(7)	$(P \vee \neg P) \wedge \neg(P \vee \neg P)$	$1, 6 \wedge E$
	(8)	$\neg\neg(P \vee \neg P)$	$1, 7 \neg E$
	(9)	$P \vee \neg P$	$8 \neg\neg B$

1.8 Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch

Recht einfach zu beweisen ist folgendes Argument:

Argument 1.17 $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$

Beweis	1	(1)	$P \wedge \neg P$	A
	1	(2)	P	$1 \wedge B$
	1	(3)	$\neg P$	$1 \wedge B$
	1	(4)	$P \wedge \neg P$	$2, 3 \wedge E$
		(5)	$\neg(P \wedge \neg P)$	$1, 4 \neg E$

...oder krzer, aber weniger leicht lesbar:

Beweis	1	(1)	$P \wedge \neg P$	A
		(2)	$\neg(P \wedge \neg P)$	$1, 1 \neg E$

1.9 Satz von DeMorgan

Die Behauptung, dass die folgenden Argumente gltig seien, ist als *Satz von DeMorgan* bekannt:

Argument 1.18 $P \wedge Q \vdash \neg(\neg P \vee \neg Q)$

Beweis	1	(1)	$P \wedge Q$	A
	2	(2)	$\neg P \vee \neg Q$	A
	3	(3)	$\neg P$	A
	1	(4)	P	$1 \wedge B$
	1,3	(5)	$P \wedge \neg P$	$3, 4 \wedge E$
	3	(6)	$\neg(P \wedge Q)$	$1, 5 \neg E$
	7	(7)	$\neg Q$	A
	1	(8)	Q	$1 \wedge B$
	1,7	(9)	$Q \wedge \neg Q$	$7, 8 \wedge E$
	7	(10)	$\neg(P \wedge Q)$	$1, 9 \neg E$
	2	(11)	$\neg(P \wedge Q)$	$2, 3, 6, 7, 10 \vee B$
	1,2	(12)	$(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$	$1, 11 \wedge E$
	1	(13)	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	$2, 12 \neg E$

Argument 1.19 $\neg(\neg P \vee \neg Q) \vdash P \wedge Q$

Beweis	1	(1)	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	A
	2	(2)	$\neg P$	A
	2	(3)	$\neg P \vee \neg Q$	$2 \vee E$
	1,2	(4)	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	$1, 3 \wedge E$
	1	(5)	$\neg\neg P$	$2, 4 \neg E$
	1	(6)	P	$5 \neg\neg B$
	7	(7)	$\neg Q$	A
	7	(8)	$\neg P \vee \neg Q$	$7 \vee E$
	1,7	(9)	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	$1, 8 \wedge E$
	1	(10)	$\neg\neg Q$	$7, 9 \neg E$
	1	(11)	Q	$10 \neg\neg B$
	1	(12)	$P \wedge Q$	$6, 11 \wedge E$

Argument 1.20 $P \vee Q \vdash \neg(\neg P \wedge \neg Q)$

Beweis	1	(1)	$P \vee Q$	A
	2	(2)	$\neg P \wedge \neg Q$	A
	3	(3)	P	A
	2	(4)	$\neg P$	$2 \wedge B$
	2,3	(5)	$P \wedge \neg P$	$3, 4 \wedge E$
	3	(6)	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$	$2, 5 \neg E$
	7	(7)	Q	A
	2	(8)	$\neg Q$	$2 \wedge B$
	2,7	(9)	$Q \wedge \neg Q$	$7, 8 \wedge E$
	7	(10)	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$	$2, 9 \neg E$
	1	(11)	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$	$1, 3, 6, 7, 10 \vee B$

Argument 1.21 $\neg(\neg P \wedge \neg Q) \vdash P \vee Q$

Beweis	1	(1)	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$	A
	2	(2)	$\neg(P \vee Q)$	A
	3	(3)	P	A
	3	(4)	$P \vee Q$	$3 \vee E$
	2,3	(5)	$(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$	$2, 4 \wedge E$
	2	(6)	$\neg P$	$3, 5 \neg E$
	7	(7)	Q	A
	7	(8)	$P \vee Q$	$7 \vee E$
	2,7	(9)	$(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)$	$2, 8 \wedge E$
	2	(10)	$\neg Q$	$7, 9 \neg E$
	2	(11)	$\neg P \wedge \neg Q$	$6, 10 \wedge E$
	1,2	(12)	$(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg(\neg P \wedge \neg Q)$	$1, 11 \wedge E$
	1	(13)	$\neg\neg(P \vee Q)$	$2, 12 \neg E$
	1	(14)	$P \vee Q$	$13 \neg\neg B$

Kapitel 2

Prdikatenlogik

2.1 Einfache Argumente

Fr den Beginn wollen wir beweisen, dass alle Schweine rosa sind, soferne alle Schweine rosa sind und grunzen.

Argument 2.1 $\bigwedge x(Sx \to (Rx \wedge Gx)) \vdash \bigwedge x(Sx \to Rx)$

Sx x ist ein Schwein.

Rx x ist rosa.

Gx x grunzt.

Unter Zugrundelegung dieser bersetzung lautet das Argument damit wie folgt: Alle Schweine sind rosa und grunzen $\vdash$ Alle Schweine sind rosa.

Beweis	1	(1)	$\bigwedge x(Sx \to (Rx \wedge Gx))$	A
	1	(2)	$Su \to (Ru \wedge Gu)$	$1 \bigwedge B$
	3	(3)	Su	A
	1,3	(4)	$Ru \wedge Gu$	$2, 3 \to B$
	1,3	(5)	Ru	$4 \wedge B$
	1	(6)	$Su \to Ru$	$3, 5 \to E$
	1	(7)	$\bigwedge x(Sx \to Rx)$	$6 \bigwedge E$

Argument 2.2 $\bigvee x(Fx \vee Gx) \vdash \bigvee xFx \vee \bigvee xGx$

Beweis	1	(1)	$\bigvee x(Fx \vee Gx)$	A
	2	(2)	$Fu \vee Gu$	A
	3	(3)	Fu	A
	3	(4)	$\bigvee xFx$	$3 \bigvee E$
	3	(5)	$\bigvee xFx \vee \bigvee xGx$	$4 \vee E$
	6	(6)	Gu	A
	6	(7)	$\bigvee xGx$	$6 \bigvee E$
	6	(8)	$\bigvee xFx \vee \bigvee xGx$	$7 \vee E$
	2	(9)	$\bigvee xFx \vee \bigvee xGx$	$2, 3, 5, 6, 8 \vee B$
	1	(10)	$\bigvee xFx \vee \bigvee xGx$	$1, 2, 9 \bigvee B$

Argument 2.3 $\bigvee xFx \vee \bigvee xGx \vdash \bigvee x(Fx \vee Gx)$

Beweis	1	(1)	$\bigvee xFx \vee \bigvee xGx$	A
	2	(2)	$\bigvee xFx$	A
	3	(3)	Fu	A
	3	(4)	$Fu \vee Gu$	$3 \vee E$
	3	(5)	$\bigvee x(Fx \vee Gx)$	$4 \bigvee E$
	2	(6)	$\bigvee x(Fx \vee Gx)$	$2, 3, 5 \bigvee B$
	7	(7)	$\bigvee xGx$	A
	8	(8)	Gu	A
	8	(9)	$Fu \vee Gu$	$8 \vee E$
	8	(10)	$\bigvee x(Fx \vee Gx)$	$9 \bigvee E$
	7	(11)	$\bigvee x(Fx \vee Gx)$	$7, 8, 10 \bigvee B$
	1	(12)	$\bigvee x(Fx \vee Gx)$	$1, 2, 6, 7, 11 \vee B$

Argument 2.4 $\bigvee x(Fx \wedge Gx) \vdash \bigvee xFx \wedge \bigvee xGx$

Beweis	1	(1)	$\bigvee x(Fx \wedge Gx)$	A
	2	(2)	$Fu \wedge Gu$	A
	2	(3)	Fu	$2 \wedge B$
	2	(4)	$\bigvee xFx$	$3 \bigvee E$
	2	(5)	Gu	$2 \wedge B$
	2	(6)	$\bigvee xGx$	$5 \bigvee E$
	2	(7)	$\bigvee xFx \wedge \bigvee xGx$	$4, 6 \wedge E$
	1	(8)	$\bigvee xFx \wedge \bigvee xGx$	$1, 2, 7 \bigvee B$

Die Umkehrung dieses Arguments ist nicht gltig:

Argument 2.5 $\bigvee xFx \wedge \bigvee xGx \nvdash \bigvee x(Fx \wedge Gx)$.

Widerlegung Zur Widerlegung reicht die Interpretation von Fx als *x ist ein Schaf* und von Gx als *x ist eine Kuh*: Die Prmisse, *Es gibt Schafe und Khe*, ist wahr, die Konklusion, *Es gibt Schafe, die Khe sind* ist falsch.

Argument 2.6 $\bigwedge xFx \wedge \bigwedge xGx \vdash \bigwedge x(Fx \wedge Gx)$

Beweis	1	(1)	$\bigwedge xFx \wedge \bigwedge xGx$	A
	1	(2)	$\bigwedge xFx$	$1 \wedge B$
	1	(3)	Fu	$2 \bigwedge B$
	1	(4)	$\bigwedge xGx$	$1 \wedge B$
	1	(5)	Gu	$4 \bigwedge B$
	1	(6)	$Fu \wedge Gu$	$3, 5 \wedge E$
	1	(7)	$\bigwedge x(Fx \wedge Gx)$	$6 \bigwedge E$

Argument 2.7 $\bigwedge x(Fx \wedge Gx) \vdash \bigwedge xFx \wedge \bigwedge xGx$

Beweis	1	(1)	$\bigwedge x(Fx \wedge Gx)$	A
	1	(2)	$Fu \wedge Gu$	$1 \bigwedge B$
	1	(3)	Fu	$2 \wedge B$
	1	(4)	$\bigwedge xFx$	$3 \bigwedge E$
	1	(5)	Gu	$2 \wedge B$
	1	(6)	$\bigwedge xGx$	$5 \bigwedge E$
	1	(7)	$\bigwedge xFx \wedge \bigwedge xGx$	$4, 6 \wedge E$

Argument 2.8 $\bigwedge xFx \vee \bigwedge xGx \vdash \bigwedge x(Fx \vee Gx)$

Beweis	1	(1)	$\bigwedge xFx \vee \bigwedge xGx$	A
	2	(2)	$\bigwedge xFx$	A
	2	(3)	Fu	$2 \bigwedge B$
	2	(4)	$Fu \vee Gu$	$3 \vee E$
	2	(5)	$\bigwedge x(Fx \vee Gx)$	$4 \bigwedge E$
	6	(6)	$\bigwedge xGx$	A
	6	(7)	Gu	$6 \bigwedge B$
	6	(8)	$Fu \vee Gu$	$7 \vee E$
	6	(9)	$\bigwedge x(Fx \vee Gx)$	$8 \bigvee E$
	1	(10)	$\bigwedge x(Fx \vee Gx)$	$1, 2, 5, 6, 9 \vee B$

Auch dieses Arguments Umkehrung ist nicht gltig:

Argument 2.9 $\bigwedge x(Fx \vee Gx) \nvdash \bigwedge xFx \vee \bigwedge xGx$

Widerlegung Legt man als Diskursuniversum die Menge der positiven natrlichen Zahlen zu Grunde und interpretiert man Fx als *x ist eine gerade Zahl* und Gx als *x ist eine ungerade Zahl*, dann ist die Prmisse, *Alle Zahlen sind gerade oder ungerade*, wahr, die Konklusion, *Alle Zahlen sind gerade, oder alle Zahlen sind ungerade*, aber falsch.

2.2 Logisches Quadrat

Instruktiv ist es, die Verhltnisse im logischen Quadrat einer Begutachtung zu unterziehen:

Argument 2.10 $\bigwedge xFx \vdash \bigvee xFx$

Beweis

1	(1)	$\bigwedge xFx$	A
1	(2)	Fu	$1 \bigwedge B$
1	(3)	$\bigvee xFx$	$2 \bigvee E$

Argument 2.11 $\bigwedge xFx \vdash \neg \bigwedge x \neg Fx$

Beweis

1	(1)	$\bigwedge xFx$	A
2	(2)	$\bigwedge x \neg Fx$	A
1	(3)	Fa	$1 \bigwedge B$
2	(4)	$\neg Fa$	$2 \bigwedge B$
1,2	(5)	$Fa \wedge \neg Fa$	$3, 4 \wedge E$
1	(6)	$\neg \bigwedge x \neg Fx$	$2, 5 \neg E$

Argument 2.12 $\vdash \neg \bigwedge x \neg Fx \leftrightarrow \bigvee xFx$

Beweis

1	(1)	$\neg \bigwedge x \neg Fx$	A
2	(2)	$\neg \bigvee xFx$	A
3	(3)	Fu	A
3	(4)	$\bigvee xFx$	$3 \bigvee E$
2,3	(5)	$\bigvee xFx \wedge \neg \bigvee xFx$	$2, 4 \wedge E$
2	(6)	$\neg Fu$	$3, 5 \neg E$
2	(7)	$\bigwedge x \neg Fx$	$6 \bigwedge E$
1,2	(8)	$\bigwedge x \neg Fx \wedge \neg \bigwedge x \neg Fx$	$1, 7 \wedge E$
1	(9)	$\neg\neg \bigvee xFx$	$2, 8 \neg E$
1	(10)	$\bigvee xFx$	$9 \neg\neg B$
	(11)	$\neg \bigwedge x \neg Fx \rightarrow \bigvee xFx$	$1, 10 \rightarrow E$
12	(12)	$\bigvee xFx$	A
13	(13)	$\bigwedge x \neg Fx$	A
14	(14)	Fu	A
13	(15)	$\neg Fu$	$13 \bigwedge B$
13,14	(16)	$Fu \wedge \neg Fu$	$14, 15 \wedge E$
14	(17)	$\neg \bigwedge x \neg Fx$	$13, 16 \neg E$
12	(18)	$\neg \bigwedge x \neg Fx$	$12, 14, 17 \bigvee B$
	(19)	$\bigvee xFx \rightarrow \neg \bigwedge x \neg Fx$	$12, 18 \rightarrow E$
	(20)	$(\neg \bigwedge x \neg Fx \rightarrow \bigvee xFx) \wedge$	
		$(\bigvee xFx \rightarrow \neg \bigwedge x \neg Fx)$	$11, 19 \wedge E$
	(21)	$\bigvee xFx \leftrightarrow \neg \bigwedge x \neg Fx$	$20 D \leftrightarrow$

Argument 2.13 $\vdash \bigwedge xFx \leftrightarrow \neg \bigvee x \neg Fx$

Beweis	1	(1)	$\bigwedge xFx$	A
	2	(2)	$\bigvee x\neg Fx$	A
	3	(3)	$\neg Fu$	A
	1	(4)	Fu	$1 \bigwedge B$
	1,3	(5)	$Fu \wedge \neg Fu$	$3, 4 \wedge E$
	3	(6)	$\neg \bigwedge xFx$	$1, 5\neg E$
	2	(7)	$\neg \bigwedge xFx$	$2, 3, 6 \bigvee B$
	1,2	(8)	$\bigwedge xFx \wedge \neg \bigwedge xFx$	$1, 7 \wedge E$
	1	(9)	$\neg \bigvee x\neg Fx$	$2, 8\neg E$
		(10)	$\bigwedge xFx \to \neg \bigvee x\neg Fx$	$1, 9 \to E$
	11	(11)	$\neg \bigvee x\neg Fx$	A
	12	(12)	$\neg \bigwedge xFx$	A
	13	(13)	$\neg Fu$	A
	13	(14)	$\bigvee x\neg Fx$	$13 \bigvee E$
	11,13	(15)	$\bigvee x\neg Fx \wedge \neg \bigvee x\neg Fx$	$11, 14 \wedge E$
	11	(16)	$\neg\neg Fu$	$13, 15\neg E$
	11	(17)	Fu	$16\neg\neg B$
	11	(18)	$\bigwedge xFx$	$17 \bigwedge E$
		(19)	$\neg \bigvee x\neg Fx \to \bigwedge xFx$	$11, 18 \to E$
		(20)	$(\bigwedge xFx \to \neg \bigvee x\neg Fx)\wedge$	
			$(\neg \bigvee x\neg Fx \to \bigwedge xFx)$	$10, 19 \wedge E$
		(21)	$\bigwedge xFx \leftrightarrow \neg \bigvee x\neg Fx$	$20D \leftrightarrow$

2.3 Wissenswertes ber Relationen

Besonders die Besucherinnen meines Modallogik-Tutoriums werden es schtzen, sich einige elementare Sachverhalte betreffend Relationen vor Augen zu fhren. Zur Erinnerung:

- Eine zweistellige Relation R heit genau dann *reflexiv*, wenn $\bigwedge xRxx$.
- Eine zweistellige Relation R heit genau dann *symmetrisch*, wenn $\bigwedge x \bigwedge y(Rxy \to Ryx)$.
- Eine zweistellige Relation R heit genau dann *transitiv*, wenn $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(Rxy \wedge Ryz \to Rxz)$.
- Eine zweistellige Relation R heit genau dann *euklidisch*, wenn $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(Rxy \wedge Rxz \to Ryz)$

Argument 2.14 *Jede transitive, symmetrische Relation ist auch euklidisch.*

Beweis				
	1	(1)	$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(Rxy \wedge Ryz \to Rxz)$	A
	2	(2)	$\bigwedge x \bigwedge y(Rxy \to Ryx)$	A
	3	(3)	$Ruv \wedge Ruw$	A
	3	(4)	Ruv	$3 \wedge B$
	2	(5)	$\bigwedge y(Ruy \to Ryu)$	$2 \bigwedge B$
	2	(6)	$Ruv \to Rvu$	$5 \bigwedge B$
	2,3	(7)	Rvu	$4, 6 \to B$
	1	(8)	$\bigwedge y \bigwedge z(Rvy \wedge Ryz \to Rvz)$	$1 \bigwedge B$
	1	(9)	$\bigwedge z(Rvu \wedge Ruz \to Rvz)$	$8 \bigwedge B$
	1	(10)	$Rvu \wedge Ruw \to Rvw$	$9 \bigwedge B$
	3	(11)	Ruw	$3 \wedge B$
	2,3	(12)	$Rvu \wedge Ruw$	$7, 11 \wedge E$
	1,2,3	(13)	Rvw	$10, 12 \to B$
	1,2	(14)	$Ruv \wedge Ruw \to Rvw$	$3, 13 \to E$
	1,2	(15)	$\bigwedge z(Ruv \wedge Ruz \to Rvz)$	$14 \bigwedge E$
	1,2	(16)	$\bigwedge y \bigwedge z(Ruy \wedge Ruz \to Ryz)$	$15 \bigwedge E$
	1,2	(17)	$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(Rxy \wedge Rxz \to Ryz)$	$16 \bigwedge E$

Argument 2.15 *Jede symmetrische, euklidische Relation ist auch transitiv.*

Beweis				
	1	(1)	$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(Rxy \wedge Rxz \to Ryz)$	A
	2	(2)	$\bigwedge x \bigwedge y(Rxy \to Ryx)$	A
	3	(3)	$Ruv \wedge Rvw$	A
	1	(4)	$\bigwedge y \bigwedge z(Rvy \wedge Rvz \to Ryz)$	$1 \bigwedge B$
	1	(5)	$\bigwedge z(Rvu \wedge Rvz \to Ruz)$	$4 \bigwedge B$
	1	(6)	$Rvu \wedge Rvw \to Ruw$	$5 \bigwedge B$
	3	(7)	Ruv	$3 \wedge B$
	2	(8)	$\bigwedge y(Ruy \to Ryu)$	$2 \bigwedge B$
	2	(9)	$Ruv \to Rvu$	$8 \bigwedge B$
	2,3	(10)	Rvu	$7, 9 \to B$
	3	(11)	Rvw	$3 \wedge B$
	2,3	(12)	$Rvu \wedge Rvw$	$10, 11 \wedge E$
	1,2,3	(13)	Ruw	$6, 12 \to B$
	1,2	(14)	$Ruv \wedge Rvw \to Ruw$	$3, 13 \to E$
	1,2	(15)	$\bigwedge z(Ruv \wedge Rvz \to Ruz)$	$14 \bigwedge E$
	1,2	(16)	$\bigwedge y \bigwedge z(Ruy \wedge Ryz \to Ruz)$	$15 \bigwedge E$
	1,2	(17)	$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(Rxy \wedge Ryz \to Rxz)$	$16 \bigwedge E$